www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

INSTITUT SUPERIEUR DE GESTION CONCOURS D'ADMISSION DE 1989

M A T H E M A T I Q U E S II (Toutes options)

DUREE 3 HEURES - COEFFICIENT : 4
COEFFICIENT / 5 (réservé au BAC technique)

LE SUJET COMPORTE TROIS PROBLEMES INDEPENDANTS QUE LES CANDIDATS TRAITERONT DANS L'ORDRE DE LEUR CHOIX.

PROBLEME I.

Pour n entier naturel strictement positif, l'on désigne par $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur à n. Soit f l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans lui même qui à un polynôme P associe le polynôme f(P) = Q défini par :

$$Q(X) = P(X+1) + P(X)$$

1°) Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2°) Montrer que pour tout entier k, $0 \leq k \leq n$, il existe un polynôme unique, que l'on notera E_k, tel que $f(E_k) = X^k$, c'est-à-dire tel que :

3°) Etablir les deux relations suivantes :

$$(i) \quad E_k(X+1) + E_k(X) = X^k$$

$$(ii) \quad (E_n)'(X) = nE_{n-1}(X)$$

où $(E_n)'$ est le polynôme dérivé de E_n.

$$(iii) \quad E_n(1-X) = (-1)^n E_n(X)$$

Pour établir cette dernière relation l'on pourra changer X en -X dans (i).

4°) Montrer que, si n est pair $E_n(X)$ est divisible par X(X-1) et si n est impair $E_n(X)$ est divisible par X-1/2.

PROBLEME II.

E et F désignent deux espaces vectoriels de dimension finie sur le corps des réels.

1°) Dans cette question $E=F=\mathbb{R}^2$; f est un endomorphisme de E défini par sa matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Déterminer par leurs matrices B, dans la base canonique de R^2, les endomorphismes g de E tels que :

$$f \circ g \circ f = f \text{ et } g \circ f \circ g = g$$

b) Comparer les rangs de f et de g.

2°) On revient au cas général f étant une application de E dans F et g une application de F dans E, telles que :

$$f \circ g \circ f = f \text{ et } g \circ f \circ g = g$$

a) Montrer que : $\text{Im } g \cap \text{Ker } f = (0)$

b) Montrer que, tout $x \in E$ est de la forme $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in \text{Im } g$ et $x_2 \in \text{Ker } f$. L' on pourra remarquer que $g \circ f$ est un projecteur.

c) Comparer les rangs de f et de g.

TSVP

PROBLEME III.

n désignant un entier naturel non nul, on considère un espace vectoriel E de dimension 2n+1 et une base $B = (e_1, e_2, \ldots, e_{2n+1})$ de ce dernier.

u est un endomorphisme de E défini par :

$u(e_1) = e_2$
$u(e_i) = e_{i+1} + e_{i-1}$ pour $1 < i < 2n+1$
$u(e_{2n+1}) = e_{2n}$.

1°) Quelle est la matrice de u dans la base B ?

2°) Déterminer une base B_1 du noyau de u.
Quel est le rang de u ?

3°) Soit $f_1, f_2, \ldots, f_{2n}$ les éléments de E suivants :

$f_i = e_{2i}$ pour $1 \leq i \leq n$
$f_{n+j} = u(e_{2j})$ pour $1 \leq j \leq n$

a) Montrer que les f_i, $1 \leq i \leq 2n$ sont des éléments de Im u.

b) Montrer que $B_2 = (f_1, f_2, \ldots, f_{2n})$ est une base de Im u.

4°)

a) Montrer que $B' = B_1 \cup B_2$ est une base de E.

b) Ecrire avec un maximum de soins et de précision la matrice de u dans cette base.

5°) Question à traiter **sans calculs matriciels.**

a) Montrer que, Ker u et Im u sont stables par u et que la restriction de u à Im u est un isomorphisme de Im u sur lui-même.

b) En déduire que la matrice suivante, carrée d'ordre n, est inversible.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

==========

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail